AVALIAÇÃO DA SELEÇÃO DE MEMBROS DO CLUBE DE MATEMÁTICA IFPE-AFOGADOS - 2019

GABARITO PRELIMINAR

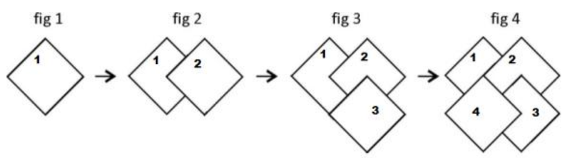
1) B	**6) B**	**11) A**	**16) D**
2) B	**7) B**	**12) D**	**17) D**
3) A	**8) C**	**13) C**	**18) E**
4) D	**9) C**	**14) D**	**19) B**
5) B	**10) E**	**15) E**	**20) C**

SOLUÇÕES

1) (B) Se o quadrado em questão tem lado 2x, ao dividirmos ele pela metade obtemos um retângulo cujo lado menor mede x e cujo lado maior mede 2x. Assim, eu unirmos estes dois retângulos como indicado na figura, obtemos um retângulo de lado menor x e de lado maior 4x.
Como o quadrado inicial tem perímetro 4 . 2x = 8x e o retângulo final tem perímetro 2(4x+x) = 10x, a razão em questão é igual a 8x/10x = 8/10 = 4/5.

2) (B) Para calcular os possíveis comprimentos dos caminhos que a formiga pode percorrer, é necessário saber o comprimento da diagonal dos retângulos da malha. Para isto usa-se o Teorema de Pitágoras, que diz que em um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c temos $a^2 = b^2 + c^2$. Se d é a diagonal que queremos calcular então d^2 = 32 + 42 = 25, donde d = 5. Note agora que existem apenas quatro opções de caminhos que a formiga pode escolher para ir de A a B:
(i) Caminhos que não passam pelas diagonais: Qualquer caminho deste tipo passa por pelo menos três lados de comprimento 4cm e dois lados de comprimento 3 cm. Neste caso, o menor caminho tem comprimento 3 x 4 + 2 x 3 = 12 + 6 = 18 cm.
(ii) Caminhos que passam por apenas uma diagonal: Todo caminho deste tipo passará no mínimo por um lado de comprimento 3 cm e dois de comprimento 4 cm. Portanto, neste caso, o menor caminho será de 5 + 3 + 2 x 4 = 16 cm.
(iii) Caminhos que passam por exatamente duas diagonais: Note que existe um caminho que passa apenas por duas diagonais e por um lado de comprimento 4; o comprimento deste caminho é 5 x 2 + 4 = 14 cm. Por outro lado, qualquer caminho que passe por duas diagonais terá que passar por um lado de comprimento 4 cm, logo seu comprimento será no mínimo igual a 14 cm. Logo, neste caso, o menor caminho tem comprimento 14 cm.
(iv) Caminhos que passam por mais de duas diagonais : Qualquer caminho deste tipo terá comprimento no mínimo 15 cm. Portanto a resposta é 14 cm.

3) (A) Inicialmente, perceba que ao posicionarmos um novo quadrado no centro de um anterior, estaremos sobrepondo um quarto de quadrado, pois a área sobreposta é um quadrado de lado igual à metade do quadrado original, e se a razão entre lados é ½, a razão entre áreas é ¼. Portanto, basta verificarmos quantos quartos de quadrado sobram na figura 4. O quadrado 1 fica com 2 quartos de quadrado, os quadrados 2 e 3 ficam com 3 quartos de quadrado cada, e o quadrado 4 fica com seus 4 quartos. Fazendo a soma, temos 2+3+3+4 = 12 quartos de quadrado. Como a área de cada quarto é (20/2).(20/2) = 100, a área total é 1200 cm².



4) (D) A única maneira de somar três números distintos entre 1, 2, 3, 4, e 5 e obter o resultado 6 é . Logo os cartões com as letras O, B e E têm, em seu verso, os números 1, 2 ou 3 (não necessariamente nessa ordem). Ao olhar para o verso dos cartões com as letras O e P, Caetano vê no verso do cartão O um dos números 1, 2 e 3. Observando as somas , e , e lembrando que o número no verso do cartão P é no máximo 5, vemos que os números no verso dos cartões O e P são, respectivamente, 3 e 5. Resta o número 4, que é o que está no verso do cartão M.

5) (B) Se Wagner tem x moedas de 25 centavos e 15 moedas no total, concluímos que 15 – x moedas são de 10 centavos. Assim, o valor que ele possui é de 25x + 10(15 – x). Além disso, 2 reais e 70 centavos equivalem a 270 centavos. Assim, a equação que permite obter o valor correto de x é 25x + 10(15 – x) = 270.

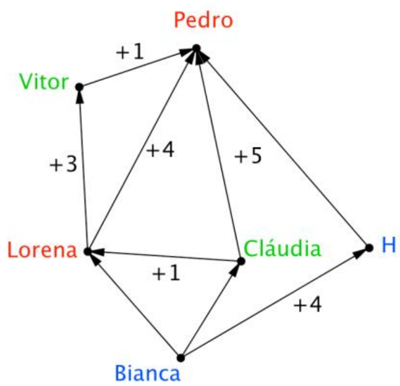
6) (B) Na tabela abaixo mostramos como analisar as informações do enunciado. Na primeira linha, supomos que Bernardo disse a verdade; na segunda, que Guto disse a verdade e na terceira, que Carlos disse a verdade.

	Guto *Não foi o meu*	**logo**	**Carlos** *Foi o meu*	**logo**	**Bernardo** *Não foi o de Guto*	**logo**
1	mentiu	O celular de Guto tocou	mentiu	O celular de Carlos não tocou	disse a verdade	O celular de Guto não tocou
2	disse a verdade	O celular de Guto não tocou	mentiu	O celular de Carlos não tocou	mentiu	O celular de Guto tocou
3	mentiu	O celular de Guto tocou	disse a verdade	O celular de Carlos tocou	mentiu	O celular de Guto tocou

Guto Não foi o meu logo Carlos Foi o meu logo Bernardo Não foi o de Guto logo 1 mentiu O celular de Guto tocou mentiu O celular de Carlos não tocou disse a verdade O celular de Guto não tocou 2 disse a verdade O celular de Guto não tocou mentiu O celular de Carlos não tocou mentiu O celular de Guto tocou 3 mentiu O celular de Guto tocou disse a verdade O celular de Carlos tocou mentiu O celular de Guto tocou Nas duas primeiras linhas, chega-se à conclusão de que o celular de Guto tanto tocou quanto não tocou (em vermelho). Essa contradição mostra que o único caso possível é o da terceira linha, ou seja, Carlos disse a verdade e os celulares de Guto e Carlos tocaram.

7) (B) Como são 5 cidades, Pablo terá de fazer 4 viagens para passar por A, B, C, D e E. Usando apenas viagens de custo 1, não conseguiremos atingir todas as cidades, pois de A pode-se chegar em C, que por sua vez leva a E, mas B e D ficariam isoladas. Em outras palavras, não existe conexão ao valor 1 do grupo {A,C,E} para o grupo {B,D} ou vice-versa, o que impossibilita uma viagem de custo total 4. Assim, o custo mínimo será 5, que pode ser obtido através das viagens A→C→E→B→D.

8) (C) Vamos representar as informações do enunciado no diagrama ao lado. Nele, a letra H indica o único homem cujo nome não aparece no enunciado. A flecha que vai de Cláudia a Pedro, indicada com +5, quer dizer que Pedro comprou 5 livros a mais que Cláudia, e analogamente para as outras flechas. As flechas que saem de Bianca para Lorena e Cláudia indicam que ambas compraram mais livros que Bianca. Mais abaixo vamos explicar as flechas que não correspondem a dados do enunciado.



Como Pedro comprou 5 livros a mais que Cláudia e cada homem comprou 4 livros a mais que sua esposa, segue que Pedro não é o marido de Cláudia. Por outro lado, Pedro comprou 5 livros a mais que Cláudia, que comprou mais livros que Bianca; logo Pedro não é o marido de Bianca, ou seja, ele é o marido de Lorena. Indicamos essa conclusão no diagrama colocando os nomes de Pedro e Lorena em vermelho e marcando a flecha que os liga com +4. Como Pedro comprou 5 livros a mais que Cláudia e 4 livros a mais que Lorena, segue que Lorena comprou 1 livro a mais que Cláudia, o que nos dá a flecha que liga Cláudia a Lorena. As flechas que ligam Cláudia a Vítor passando por Lorena mostram que Vítor comprou 4 livros a mais que Cláudia; como Cláudia comprou mais livros que Bianca, segue que Vítor comprou pelo menos 5 livros a mais que Bianca. Logo Vítor não é o marido de Bianca, ou seja, ele é o marido de Cláudia; indicamos essa conclusão colocando seus nomes em verde. Logo Bianca é a mulher de H; assim, ligamos esses dois por uma flecha com +4 e colocamos seus nomes em azul. Notamos ainda que Pedro comprou pelo menos 6 livros a mais que Bianca; como H comprou 4 livros a mais que Bianca, segue que Pedro comprou mais livros que H. Finalmente, observamos que como Pedro comprou 4 livros a mais que Lorena e Vítor comprou 3 livros a mais que Lorena, segue que Pedro comprou 1 livro a mais que Vítor, conforme indicado. Podemos agora analisar as alternativas:

A) Falsa, pois Pedro comprou 1 livro a mais que Vítor.
B) Falsa, pois Pedro é o marido de Lorena.
C) Verdadeira, pois Pedro comprou mais livros que Vítor e que H.
D) Falsa, pois Lorena comprou um livro a mais que Cláudia.
E) Falsa, pois Vitor é marido de Cláudia.

9) (C) A diferença entre dois números é ímpar apenas quando um deles é par e o outro é ímpar. O único número primo par é o número 2. Daí, se p e q são números primos diferindo por 7, um deles deve ser 2 e o outro deve ser 9. Chegamos em um absurdo pois 9 não é primo. Todos os números dos outros itens podem ser realizados como diferença de primos: 4=7-3; 6=11-5; 8=11-3 e 9=11-2.

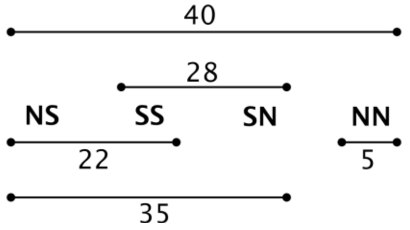
10) (E) Como 2010 é múltiplo de 6, cada uma das três cores está equidistribuída tanto entre os números pares quanto entre os números ímpares dos 2010 primeiros números. Vejamos as cores dos próximos quatro números:

2011(Amarela), 2012(Verde), 2013(Preta) e 2014(Amarela)

O elemento 2013 faz os ímpares pretos terem uma unidade a mais do que os verdes ímpares.

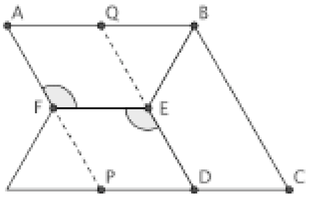
11) A) Se a porta 1 não é segura, as mensagens 1 e 3 seriam simultaneamente falsas e isso contrariaria as informações do enunciado porque sabemos que apenas uma das mensagem o é. Vale observar que cada uma das outras portas pode ser a porta não segura, resultando em nenhuma ou duas mensagens falsas.

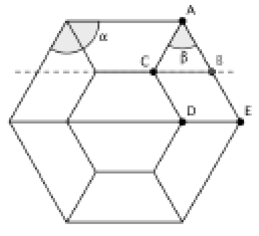
12) (D) Os 40 alunos da sala podem ser divididos em quatro grupos disjuntos:



• SS: responderam *sim* às duas perguntas;
• SN: responderam *sim* à primeira pergunta e *não* à segunda;
• NS: responderam *sim* à primeira pergunta e *não* à segunda;
• NN: responderam *não* às duas perguntas.
Na figura ao lado, representamos esquematicamente as informações do enunciado:
• os grupos, juntos, formam a turma, que tem 40 alunos;
• SS e SN, juntos, têm 28 alunos;
• NS e SS, juntos, têm 22 alunos;
• NN tem 5 alunos.
Como NN tem 5 alunos, os grupos NS, SS e SN têm, juntos, 40-5=35 alunos. O diagrama mostra que, se somarmos o número de alunos dos grupos NS e SN com duas vezes o número de alunos do grupo SS, o total será 22+28=50. Como o número total de alunos desses três grupos é 35, segue que o número de alunos do grupo SS é 50-35=15.

13) (C) A figura ao lado mostra uma parte do hexágono formada por três trapézios. Prolongamos os segmentos *AF* e *DE* para obter os pontos *P* e *Q*, como indicado. Como os trapézios são idênticos, os ângulos assinalados são iguais; segue que *AP* e *QD* são paralelos. Como *PD* e *EF*, sendo bases de um trapézio, também são paralelos, segue que *PDEF* é um paralelogramo; em particular, temos *PF* = *DE* . Da igualdade dos trapézios temos *AF* = *DE* = *EF* e concluímos que *AP* = 2*EF* . Notamos agora que *APCB* também é um paralelogramo; logo *BC* = *AP* = 2*EF* e como *BC* = 10 segue que *EF* = 5 .



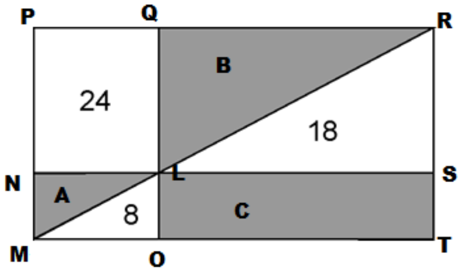


Outra solução é a seguinte. Como os trapézios são idênticos, o hexágono que eles formam é regular. Como o ângulo interno α desse hexágono mede 120° , o ângulo β mede 120º/2=60º. Logo o triângulo *ABC* é equilátero; como *AC* =*CD* temos *BC* = *CD* e segue que o paralelogramo *BCDE* é um losango. Assim, *B* é o ponto médio de *AE* e
então *AC* = *BE* = 1/2 *AE* =1/2 x10 = 5cm.

14) (D) Vamos denotar as alturas de Ana, Bernardo, Célia e Danilo por *a*, *b*, *c* e *d*, respectivamente. O enunciado nos diz que $a - c = d - a$; logo $a = (c+d)/2$ está no ponto médio entre *c* e *d*, e como $c < d$ temos $c < a < d$. Temos também $b + d = a + c$, ou seja, $c - b = d - a$. Como $d - a > 0$, concluímos que $c > b$ e segue que $b < c < a < d$. Vamos agora às alternativas.
A) Falsa, pois $c < a$.
B) Falsa, pois como $b < c < a < d$ temos $d - b > a - c$.
C) Falsa, pois $b < c$.

D) Verdadeira, pois de $b + d = a + c$ segue $d - c = a - b$.
E) Falsa, pois $a < d$.

15) (E) Chamaremos de A, B e C as áreas sombreadas. Além disso, numeramos os vértices da figura com as letras de L a R para facilitar a explicação. Como o triângulo de área A tem a mesma base (NL = MO) e mesma altura (NM = LO) do triângulo de área 8, temos A = 8. De forma semelhante, temos que B = 18. Com isso, concluímos que $A_{MNLO} = 16$ e $A_{LQRS} = 36$. Além disso, temos a seguinte igualdade:
$A_{MNLO} \cdot A_{LQRS} = A_{NPQL} \cdot A_{OLST}$ (*) $\Leftrightarrow 16 \cdot 36 = 24 \cdot C \Leftrightarrow C = 24$
Portanto, a área da figura será 24+18+8+A+B+C = 100 m².



(*): a igualdade é verdadeira porque o lado esquerdo pode ser escrito $MN \cdot MO \cdot LS \cdot QL$ e o lado direito como $PQ \cdot PN \cdot LO \cdot OT$, sendo MN = LO, MO = PQ, LS = OT e QL = PN.

16) (D) O primeiro triângulo da sequência é formado por três palitos. Para *n* ³ 2, o triângulo que ocupa a posição *n* na sequência é formado acrescentando *n* triângulos iguais ao primeiro ao triângulo precedente. Logo, o total de palitos utilizados para construir o triângulo que ocupa a posição *n* na sequência é
3. 1+3.2+ ...+3n= 3(1+2+...+n)= 3n(n+1)/2=135
Para saber em qual triângulo foram usados 135 palitos, devemos resolver a equação
$3n(n+1)/2 = 135$, ou seja, $n(n + 1) = 90$. Por inspeção, vemos que a raiz positiva dessa equação é $n = 9$; logo o triângulo que estamos procurando é o nono triângulo da sequência, cujo lado tem 9 palitos.

17 (D) Se n é o menor destes números então os outros dois são n + 1 e n + 2 . A soma dos três números é n + (n + 1) + (n + 2) = 90. Logo 3n + 3 = 90, donde 3n = 87 e segue que n = 29. Logo os números são 29, 30 e 31 e o maior é 31.

18 (E) Às 12h 30min o ponteiro dos minutos deu meia volta no relógio a partir do número 12 do mostrador, ou seja, percorreu 360º /2 = 180º. Os números 1, 2, 3, … ,12 do mostrador do relógio dividem a circunferência em doze ângulos iguais, cada um com 360º / 12 = 30º . Logo, a cada hora, o ponteiro das horas (o menor) percorre um ângulo de 30º ; em meia-hora este ponteiro percorre então 30º/ 2 = 15º. Logo, o ângulo formado pelos dois ponteiros é 180º - 15º = 165º.

19) (B) Se o grupo resolveu x problemas em janeiro, então nos outros meses eles resolveram 2x, 4x, 8x, 16x e 32 problemas x . Assim, o total de problemas resolvidos ao final de junho foi x + 2x + 4x + 8x +16x + 32x = 63x. Logo 63x = 1134, donde x = 1134/63 = 18.

20)(C) Observando a figura da fita dobrada vemos que x + 50º + 50º = 180º , donde o x = 80º .

Afogados da Ingazeira, 29/03/2019

Comissão do Clube de Matemática - Portaria 0033/2019